

Visualisasi Solusi Numerik Model SEIT pada Diabetes Mellitus Melalui Pembangkitan Ornamen Geometris

Aldin Rukyat Nasution¹, Rifki Muhammad Naufal Adha², Sugiyanto³

¹Mathematics Departement, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Jl. Marsda Adisucipto No 1 Yogyakarta 55281, Indonesia, Email: aldinnasution442@gmail.com

²Mathematics Departement, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Jl. Marsda Adisucipto No 1 Yogyakarta 55281, Indonesia, Email: rifki.faldhaa@gmail.com

³Mathematics Departement, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Jl. Marsda Adisucipto No 1 Yogyakarta 55281, Indonesia, Email: sugiyanto@uin-suka.ac.id

Abstract

Diabetes Mellitus is a chronic metabolic disease whose risk factors can spread dynamically within a population through social interactions and lifestyle influences. This study aims to develop and analyze a mathematical model describing the transmission dynamics of Diabetes Mellitus risk factors using a social contagion approach. The proposed model is formulated as a system of differential equations consisting of four compartments: susceptible, exposed (high-risk lifestyle), infected (diabetic), and treated populations. Mathematical analysis is conducted to investigate the boundedness of solutions and to determine the equilibrium points of the system. The results show that the model has two equilibrium states: the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium, which are determined by the basic reproduction number R_0 . The local stability of the equilibrium points is analyzed using the Routh–Hurwitz criterion. Furthermore, numerical simulations are performed to illustrate the dynamics of the system over time. The numerical solutions of the infected compartment are then transformed using polar coordinates and rotational symmetry to generate visual generative art in the form of geometric ornaments.

Keywords: Diabetes Mellitus, mathematical model, basic reproduction number, numerical simulation, batik motif.

Abstrak

Diabetes Mellitus merupakan penyakit metabolik kronis yang faktor risikonya dapat menyebar secara dinamis dalam populasi melalui interaksi sosial dan pengaruh gaya hidup. Penelitian ini bertujuan untuk membangun dan menganalisis model matematika yang menggambarkan dinamika penyebaran faktor risiko Diabetes Mellitus melalui pendekatan penularan sosial (social contagion). Model yang dikembangkan berbentuk sistem persamaan diferensial yang terdiri dari empat kompartemen, yaitu populasi rentan, terpapar (gaya hidup berisiko tinggi), terinfeksi (penderita diabetes), dan populasi yang menjalani perawatan. Analisis matematis dilakukan untuk mengkaji keterbatasan solusi serta menentukan titik ekuilibrium sistem. Hasil analisis menunjukkan bahwa sistem memiliki dua keadaan keseimbangan, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik endemik yang dipengaruhi oleh nilai bilangan reproduksi dasar R_0 . Kestabilan lokal sistem dianalisis menggunakan kriteria Routh–Hurwitz. Selain itu, simulasi numerik digunakan untuk menggambarkan dinamika solusi sistem terhadap waktu. Solusi numerik dari kompartemen terinfeksi kemudian ditransformasikan melalui pemetaan koordinat polar dan simetri rotasi untuk menghasilkan seni generatif visual berupa ornamen geometris.

Kata kunci: Diabetes Mellitus, model SEIT, bilangan reproduksi dasar, simulasi numerik, ornamen geometris.

How to Cite: Nasution, A. R.; Adha, R. M. N; & Sugiyanto (2026). Visualisasi Solusi Numerik Model SEIT pada Diabetes Mellitus Melalui Pembangkitan Ornamen Geometris. *Journal of Mathematics in Teaching and Learning*, 4 (2), 424-439.

PENDAHULUAN

Diabetes Mellitus (DM) adalah penyakit metabolik kronis yang ditandai oleh kenaikan kadar glukosa dalam darah karena masalah pada sekresi insulin, fungsi insulin, atau keduanya (Zheng et al., 2018). Penyakit ini merupakan salah satu isu kesehatan global yang terus meningkat prevalensinya setiap tahun. Laporan Federasi Diabetes Internasional (IDF) mengungkapkan bahwa jumlah penderita

Received May 13, 2026; Revised May 31, 2026; Accepted June 30, 2026

diabetes di seluruh dunia diprediksi akan terus meningkat signifikan dalam beberapa dekade mendatang jika intervensi pencegahan dan pengendalian yang efektif tidak dilakukan (Boyko et al., 2021). Di Indonesia, diabetes tergolong dalam penyakit tidak menular (PTM) dengan tingkat kejadian yang tinggi, berdampak pada penurunan kualitas hidup serta peningkatan risiko komplikasi jangka panjang (Soewondo et al., 2013).

Meskipun secara klinis diklasifikasikan sebagai PTM, perkembangan kasus Diabetes Mellitus tipe 2 dalam suatu populasi secara masif dipengaruhi oleh faktor perilaku, pola makan, dan minimnya aktivitas fisik yang sering kali terpengaruh oleh lingkungan sosial (Hruschka et al., 2011). Kajian sosiologi kesehatan dan epidemiologi modern telah menunjukkan bahwa kebiasaan berisiko ini dapat "menular" melalui jejaring sosial, sebuah fenomena yang dikenal luas sebagai penularan sosial atau social contagion (Christakis & Fowler, 2007). Interaksi dengan lingkungan yang didominasi oleh gaya hidup tidak sehat terbukti meningkatkan probabilitas individu yang rentan untuk secara perlahan mengadopsi kebiasaan serupa. Oleh sebab itu, dibutuhkan pendekatan analitis yang dapat menggambarkan interaksi faktor-faktor tersebut secara sistemik dan terstruktur. Salah satu metode yang banyak diterapkan dalam penelitian epidemiologi adalah pemodelan matematis yang menggunakan sistem persamaan diferensial (Duun-Henriksen et al., 2013; Hill et al., 2010).

Penggunaan sistem persamaan diferensial dalam memodelkan dinamika penyakit memfasilitasi pemisahan populasi ke dalam berbagai status transisi klinis maupun sosial, seperti pada kerangka model SEIT (*Susceptible, Exposed, Infected, Treated*) (Boutayeb et al., 2004). Dalam analisis penyebaran DM berbasis *social contagion*, populasi terpapar (*Exposed*) tidak dimaknai sebagai individu dalam masa inkubasi virus, melainkan merepresentasikan kelompok pra-diabetes atau individu rentan yang telah mengadopsi gaya hidup berisiko dari lingkungannya (Kaya' et al., 2021). Sementara itu, kompartemen terinfeksi (*Infected*) memuat kelompok penderita DM yang terdiagnosis secara medis dan memerlukan perawatan (Ulfah, 2014). Penelusuran analitik terhadap model kompartemen ini memungkinkan kalkulasi titik ekuilibrium, pencarian angka reproduksi dasar (R_0), serta uji kestabilan sistem, yang sangat vital untuk mengevaluasi laju eskalasi penderita di masa depan (Ulfah, 2014).

Di sisi lain, dinamika solusi sistem persamaan diferensial nonlinear tidak hanya krusial untuk penarikan konklusi teoretis, tetapi juga menyediakan ruang eksplorasi yang luas untuk bidang visualisasi komputasional (Boden & Edmonds, 2009). Trajektori pertumbuhan pada setiap kompartemen populasi khususnya evolusi kurva numerik dari kelompok terinfeksi $I(t)$ terhadap waktu yang menghasilkan bentuk parametrik unik yang dapat direkayasa lebih lanjut melalui pemetaan geometri (Greenfield, 2006). Dalam domain seni generatif, proyeksi kurva solusi diferensial ke dalam sistem koordinat polar, dipadukan dengan rekayasa simetri rotasi dan translasi periodik, terbukti mampu melahirkan konstruksi ornamen geometris radial yang sangat simetris dan kompleks. Pendekatan interdisipliner ini sukses menerjemahkan deret data kuantitatif ke dalam bentuk estetika algoritmik murni yang teratur secara visual (McCormack et al., 2014).

Lebih lanjut, visualisasi data berbasis seni generatif telah menjadi elemen penting untuk

menyajikan informasi kuantitatif yang kompleks agar memiliki nilai estetika dan daya tarik komunikatif bagi masyarakat luas (Iliinsky & Steele, 2011). Adapun struktur matematis algoritmik, seperti konvergensi ke titik tetap, siklus fase, atau osilasi spiral, sering kali menghasilkan output visual yang memiliki kemiripan dengan pola-pola tradisional. Dalam budaya Indonesia, ornamen visual seperti batik juga dibangun di atas prinsip keteraturan matematis, seperti pengulangan periodik, simetri refleksi, dan rotasi (Alghar & Jamaluddin, 2024; Hariadi et al., 2013; Rukmawati et al., 2025). Oleh karena itu, meskipun tidak diturunkan langsung dari nilai filosofis budaya, pola-pola geometris yang direkayasa dari dinamika solusi model penyakit memiliki potensi untuk ditransformasikan menjadi desain motif ornamen kontemporer yang mereplikasi struktur simetris layaknya batik (Azzahra et al., 2023; Romadiastri, 2017; Sudrajat et al., 2026).

Berdasarkan paparan tersebut, penelitian ini diarahkan untuk mengkonstruksi dan mengevaluasi model matematika SEIT pada dinamika Diabetes Mellitus melalui pendekatan penularan sosial. Selain menganalisis sifat-sifat matematis model secara teoretis, penelitian ini juga mengeksplorasi visualisasi trajektori solusi numeriknya. Pendekatan ini diharapkan dapat memperkaya literatur pemodelan matematika pada penyakit metabolik, sekaligus menyajikan implementasi lintas disiplin antara sains komputasi, persamaan diferensial, dan pembangkitan ornamen geometris visual sebagai bentuk apresiasi terhadap seni pola berulang.

METODE

Penelitian ini menggunakan metode kuantitatif dengan melakukan pemodelan matematika berupa sistem persamaan diferensial biasa (PDB) kompartemen SEIT (*Susceptible, Exposed, Infected, Treated*) yang diadaptasi dari studi sebelumnya, namun didefinisi dalam konteks penularan sosial (*social contagion*) faktor risiko penyakit metabolik. Total populasi, yang dinotasikan dengan $N(t)$, dibagi ke dalam empat kompartemen berdasarkan status adopsi gaya hidup dan kondisi klinis terhadap waktu t , yaitu:

1. $S(t)$ (Rentan/*Susceptible*): Populasi individu sehat yang rentan terhadap pengaruh gaya hidup berisiko.
2. $E(t)$ (Terpapar/*Exposed*): Populasi pra-diabetes atau individu yang telah mulai mengadopsi gaya hidup berisiko tinggi (pola makan buruk, kurang gerak) akibat pengaruh sosial, namun belum terdiagnosis diabetes.
3. $I(t)$ (Terinfeksi/*Infected*): Populasi penderita Diabetes Mellitus yang telah terdiagnosis secara klinis.
4. $T(t)$ (Perawatan/*Treated*): Populasi penderita DM yang secara aktif menjalani perawatan medis dan modifikasi gaya hidup.

Untuk membangun model sistemik, ditetapkan beberapa asumsi dasar penyebaran pengaruh sosial sebagai berikut:

1. Populasi bertambah melalui laju rekrutmen konstan sebesar Λ .

2. Individu rentan (S) memiliki probabilitas untuk mengadopsi gaya hidup berisiko dan berpindah ke kelas pra-diabetes (E) akibat interaksi sosial dengan penderita DM di lingkungannya, dengan laju pengaruh/penularan sosial sebesar β .
3. Individu dengan gaya hidup berisiko (E) lambat laun akan mengalami progresi penyakit menjadi penderita DM (I) dengan laju α .
4. Individu terinfeksi dapat menjalani perawatan dan berpindah ke kelas perawatan.
5. Sebagian penderita DM akan mencari pengobatan dan masuk ke kompartemen perawatan (T) dengan laju γ . Terdapat laju kematian alami konstan sebesar μ pada setiap kompartemen. Kematian tambahan akibat komplikasi DM terjadi pada kelas I sebesar δ dan pada kelas T sebesar δ_T . Individu dalam perawatan memiliki kemungkinan keluar dari sistem akibat faktor tertentu.

Berdasarkan asumsi tersebut, model matematika dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\alpha + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - (\gamma + \delta + \mu)I \\ \frac{dT}{dt} &= \gamma I - (\mu + \delta_T)T\end{aligned}$$

Dengan kondisi awal:

$$S(0) \geq 0, \quad E(0) \geq 0, \quad I(0) \geq 0, \quad T(0) \geq 0.$$

Adapun seluruh parameter positif, dengan keterangan

Λ : laju rekrutmen populasi;

β : laju penularan dari individu terinfeksi;

α : laju perpindahan dari rentan ke terpapar;

η : faktor penguatan penularan dari individu terpapar;

γ : laju individu terinfeksi masuk ke perawatan;

δ : laju kematian akibat penyakit;

μ : laju kematian alami.

Analisis Dinamik Sistem

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa solusi dari sistem model tetap berada pada daerah non-negatif untuk setiap waktu $t \geq 0$, dengan syarat kondisi awal yang diberikan juga non-negatif. Misalkan kondisi awal memenuhi

$$S(0), E(0), I(0), T(0) \geq 0.$$

Dari sistem (1) diperoleh

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \mu S \geq -\mu S.$$

$$S(t) \geq S(0)e^{-\mu t}.$$

Hal ini menunjukkan bahwa populasi rentan tetap bernilai tidak negatif untuk setiap $t \geq 0$.

Selanjutnya, untuk kompartemen terpapar diperoleh

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\alpha + \mu)E \geq -(\alpha + \mu)E,$$

$$E(t) \geq E(0)e^{-(\alpha+\mu)t}.$$

Dengan demikian, populasi terpapar juga tetap berada pada daerah non-negatif. Untuk kompartemen terinfeksi diperoleh

$$\frac{dI}{dt} = \alpha E - (\gamma + \delta + \mu)I \geq -(\gamma + \delta + \mu)I,$$

$$I(t) \geq I(0)e^{-(\gamma+\delta+\mu)t}.$$

Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu terinfeksi tidak menjadi negatif. Terakhir, untuk kompartemen perawatan diperoleh

$$\frac{dT}{dt} = \gamma I - (\mu + \delta_T)T \geq -(\mu + \delta_T)T,$$

$$T(t) \geq T(0)e^{-(\mu+\delta_T)t}.$$

Dengan demikian, semua variabel solusi memenuhi

$$S(t), E(t), I(t), T(t) \geq 0, \forall t \geq 0.$$

Pembangkitan Ornamen Geometris Berbasis Solusi Numerik

Selain evaluasi analitik, solusi numerik dari sistem kompartemen disimulasikan komputasinya menggunakan perangkat lunak (MATLAB dan Python) untuk memvisualisasikan dinamika kompartemen terinfeksi $I(t)$. Data numerik waktu kontinu dari $I(t)$ kemudian dimanfaatkan sebagai parameter input pembangkitan seni generatif. Kurva solusi mula-mula ditransformasikan dari ruang Cartesian 1D ke dalam bidang geometri dua dimensi menggunakan pemetaan koordinat polar:

$$x = I(t) \cos(\theta), \quad y = I(t) \sin(\theta)$$

dengan batas sudut $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Untuk memperoleh proporsi visual yang simetris, nilai $I(t)$ dinormalisasi pada interval $[0,1]$. Kurva hasil pemetaan polar tersebut selanjutnya dikenai rekayasa simetri rotasi secara iteratif (sebanyak n kali) terhadap titik pusat orbit $(0,0)$. Matriks transformasi rotasi terhadap titik (x, y) dengan sudut ϕ dirumuskan sebagai:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Langkah operasional komputasi ini menghasilkan pola radial yang memiliki simetri melingkar, membentuk ornamen geometris yang secara visual memiliki keteraturan pola berulang

HASIL DAN PEMBAHASAN

Keterbatasan dan Region Invarian

Sebelum menganalisis titik ekuilibrium, perlu ditunjukkan bahwa solusi dari sistem model secara biologis bernilai non-negatif dan terbatas untuk setiap waktu $t \geq 0$. Misalkan diberikan kondisi awal $S(0), E(0), I(0), T(0) \geq 0$. Dari persamaan kompartemen rentan diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI - \mu S \geq -\mu S \\ S(t) &\geq S(0)e^{-\mu t}\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan populasi rentan tetap bernilai non-negatif. Dengan cara yang sama, untuk kompartemen lainnya diperoleh $E(t) \geq E(0)e^{-(\alpha+\mu)t}$, $I(t) \geq I(0)e^{-(\gamma+\delta+\mu)t}$, dan $T(t) \geq T(0)e^{-(\mu+\delta_T)t}$. Dengan demikian, semua variabel solusi memenuhi kondisi non-negatif.

Selanjutnya, laju perubahan total populasi $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + T(t)$ adalah

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \delta I - \delta_T T.$$

Karena $\delta I \geq 0$ dan $\delta_T T \geq 0$, maka berlaku

$$\frac{dN}{dt} \leq \Lambda - \mu N.$$

Inequality ini menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi total dibatasi oleh laju rekrutmen dan kematian alami. Selanjutnya, dipertimbangkan persamaan diferensial berikut

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \Lambda - \mu N, \\ N(t) &= \frac{\Lambda}{\mu} + \left(N(0) - \frac{\Lambda}{\mu}\right)e^{-\mu t}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) &= \frac{\Lambda}{\mu}.\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa jumlah populasi total tidak akan melebihi nilai $\frac{\Lambda}{\mu}$ dalam jangka panjang.

Dengan demikian, diperoleh batas atas

$$0 \leq N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

$$\Omega = \left\{ (S, E, I, T) \in \mathbb{R}_+^4 \mid N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

merupakan daerah invarian positif bagi sistem.

Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium diperoleh dengan membuat sistem (1) sama dengan nol, yaitu

$$\begin{aligned}0 &= \Lambda - \beta SI - \mu S, \\ 0 &= \beta SI - (\alpha + \mu)E, \\ 0 &= \alpha E - (\gamma + \delta + \mu)I, \\ 0 &= \gamma I - (\mu + \delta_T)T.\end{aligned}$$

Untuk titik bebas penyakit, diasumsikan tidak terdapat individu yang terinfeksi dalam populasi, sehingga

$$E = 0, I = 0, T = 0.$$

Substitusi ke persamaan pertama menghasilkan

$$0 = \Lambda - \mu S,$$

sehingga diperoleh

$$S = \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Dengan demikian, titik ekuilibrium bebas penyakit diberikan oleh

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right).$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit menggambarkan kondisi ketika tidak terdapat penyebaran penyakit dalam populasi. Pada keadaan ini seluruh populasi berada pada kelas rentan dengan jumlah $\frac{\Lambda}{\mu}$, sedangkan kompartemen lainnya bernilai nol.

Reproduksi R_0

Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar, digunakan metode *Next Generation Matrix (NGM)*.

Kompartemen yang berperan dalam penyebaran penyakit adalah E dan I .

Sistem untuk kompartemen terinfeksi dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\alpha + \mu)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - (\gamma + \delta + \mu)I. \end{aligned}$$

Bagian infeksi baru dinyatakan sebagai

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta SI \\ 0 \end{pmatrix},$$

dan bagian transisi dinyatakan sebagai

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} (\alpha + \mu)E \\ (\gamma + \delta + \mu)I - \alpha E \end{pmatrix}.$$

Jacobian dari $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ terhadap variabel E dan I adalah

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \alpha + \mu & 0 \\ -\alpha & \gamma + \delta + \mu \end{pmatrix}.$$

Evaluasi pada titik bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$ menghasilkan

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta \Lambda}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha + \mu} & 0 \\ \frac{\alpha}{(\alpha + \mu)(\gamma + \delta + \mu)} & \frac{1}{\gamma + \delta + \mu} \end{pmatrix}.$$

Matriks generasi berikutnya adalah

$$FV^{-1}.$$

Nilai eigen dominan dari matriks tersebut adalah

$$R_0 = \frac{\beta \Lambda \alpha}{\mu(\alpha + \mu)(\gamma + \delta + \mu)}.$$

Nilai R_0 menyatakan rata-rata jumlah individu yang terinfeksi akibat satu individu terinfeksi dalam populasi yang seluruhnya rentan. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang dari populasi, sedangkan jika $R_0 > 1$, penyakit dapat menyebar dan menjadi endemik.

Setelahnya akan dicari Kestabilan Lokal Bebas Penyakit, dimana Kestabilan lokal titik bebas penyakit E_0 ditentukan berdasarkan nilai R_0 . Dari hasil sebelumnya diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta \Lambda \alpha}{\mu(\alpha + \mu)(\gamma + \delta + \mu)}.$$

Titik bebas penyakit adalah

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right).$$

Untuk menganalisis kestabilan, dilakukan linearisasi sistem di sekitar titik E_0 . Matriks Jacobian dari sistem (1) adalah

$$J = \begin{pmatrix} -\beta I - \mu & 0 & -\beta S & 0 \\ \beta I & -(\alpha + \mu) & \beta S & 0 \\ 0 & \alpha & -(\gamma + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \delta_T) \end{pmatrix}.$$

Substitusi titik E_0 menghasilkan

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta \Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -(\alpha + \mu) & \frac{\beta \Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \alpha & -(\gamma + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \delta_T) \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen diperoleh dari persamaan karakteristik

$$\det(J(E_0) - \lambda I) = 0.$$

Dari bentuk matriks diperoleh dua nilai eigen secara langsung, yaitu

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -(\mu + \delta_T).$$

Dua nilai eigen lainnya diperoleh dari submatriks

$$\begin{pmatrix} -(\alpha + \mu) & \frac{\beta\Lambda}{\mu} \\ \alpha & -(\gamma + \delta + \mu) \end{pmatrix}.$$

Kestabilan ditentukan dari tanda bagian real nilai eigen, yang bergantung pada nilai R_0 . Titik bebas penyakit E_0 bersifat stabil asimtotik lokal jika seluruh nilai eigen bernilai negatif. Hal ini terjadi ketika $R_0 < 1$, sehingga gangguan kecil tidak menyebabkan munculnya infeksi dalam populasi. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, maka terdapat nilai eigen positif yang menyebabkan titik bebas penyakit menjadi tidak stabil.

Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik diperoleh dengan membuat sistem (1) sama dengan nol, dengan syarat terdapat infeksi dalam populasi, yaitu

$$E \neq 0, I \neq 0.$$

Dari sistem diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda - \beta SI - \mu S, \\ 0 &= \beta SI - (\alpha + \mu)E, \\ 0 &= \alpha E - (\gamma + \delta + \mu)I, \\ 0 &= \gamma I - (\mu + \delta_T)T. \end{aligned}$$

Dari persamaan terakhir diperoleh

$$T = \frac{\gamma I}{\mu + \delta_T}.$$

Dari persamaan ketiga diperoleh

$$E = \frac{(\gamma + \delta + \mu)}{\alpha} I.$$

Substitusi ke persamaan kedua menghasilkan

$$\begin{aligned} \beta SI &= (\alpha + \mu) \frac{(\gamma + \delta + \mu)}{\alpha} I, \\ S &= \frac{(\alpha + \mu)(\gamma + \delta + \mu)}{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi ke persamaan pertama menghasilkan

$$\begin{aligned} \Lambda - \beta SI - \mu S &= 0, \\ I &= \frac{\Lambda - \mu S}{\beta S}. \end{aligned}$$

Dengan demikian titik ekuilibrium endemik dinyatakan sebagai

$$E^* = (S^*, E^*, I^*, T^*)$$

dengan

$$S^* = \frac{(\alpha + \mu)(\gamma + \delta + \mu)}{\alpha\beta},$$

$$I^* = \frac{\Lambda - \mu S^*}{\beta S^*},$$

$$E^* = \frac{(\gamma + \delta + \mu)}{\alpha} I^*,$$

$$T^* = \frac{\gamma}{\mu + \delta_T} I^*.$$

Titik ekuilibrium endemik menggambarkan kondisi ketika penyakit tetap ada dalam populasi dalam jangka panjang. Nilai setiap kompartemen bergantung pada parameter model, dan keberadaan solusi ini berkaitan dengan nilai R_0 .

Selanjutnya kita cari Eksistensi dan Keunikan Titik Endemik, dimana dari hasil sebelumnya diperoleh

$$I^* = \frac{\Lambda - \mu S^*}{\beta S^*}.$$

Agar titik ekuilibrium endemik ada, diperlukan

$$I^* > 0,$$

sehingga

$$\Lambda - \mu S^* > 0.$$

Substitusi nilai S^* menghasilkan

$$\Lambda - \mu \cdot \frac{(\alpha + \mu)(\gamma + \delta + \mu)}{\alpha\beta} > 0.$$

Ketidaksamaan ini dapat ditulis kembali sebagai

$$\frac{\beta\Lambda\alpha}{\mu(\alpha + \mu)(\gamma + \delta + \mu)} > 1.$$

Dari hasil sebelumnya diketahui bahwa

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda\alpha}{\mu(\alpha + \mu)(\gamma + \delta + \mu)},$$

sehingga diperoleh

$$R_0 > 1.$$

Selain itu, karena S^* diperoleh secara tunggal dan kompartemen lainnya dinyatakan sebagai fungsi dari S^* , maka titik ekuilibrium endemik yang diperoleh bersifat unik.

Syarat keberadaan titik ekuilibrium endemik ditentukan oleh nilai I^* yang harus positif. Dari hasil perhitungan, kondisi tersebut ekuivalen dengan $R_0 > 1$. Hal ini menunjukkan bahwa penyakit akan tetap bertahan dalam populasi apabila tingkat penularan cukup besar dibandingkan dengan laju keluarnya individu dari kelas terinfeksi. Selain itu, karena semua variabel pada titik ekuilibrium dapat dinyatakan secara eksplisit dalam satu nilai S^* , maka solusi yang diperoleh bersifat tunggal, sehingga titik ekuilibrium endemik adalah unik.

Kestabilan lokal titik ekuilibrium endemik E^* ditentukan dengan melakukan linearisasi sistem di sekitar titik tersebut. Matriks Jacobian dari sistem (1) adalah

$$J = \begin{pmatrix} -\beta I - \mu & 0 & -\beta S & 0 \\ \beta I & -(\alpha + \mu) & \beta S & 0 \\ 0 & \alpha & -(\gamma + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \delta_T) \end{pmatrix}.$$

Evaluasi pada titik ekuilibrium endemik $E^* = (S^*, E^*, I^*, T^*)$ menghasilkan matriks Jacobian $J(E^*)$.

Persamaan karakteristik diperoleh dari

$$\det(J(E^*) - \lambda I) = 0.$$

Berdasarkan struktur matriks, salah satu nilai eigen dapat diperoleh secara langsung, yaitu

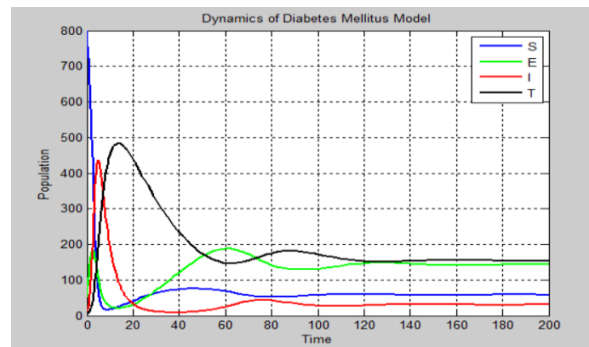
$$\lambda_1 = -(\mu + \delta_T).$$

Nilai eigen lainnya ditentukan dari submatriks berordo tiga. Dengan menggunakan kriteria Routh–Hurwitz, kestabilan sistem ditentukan oleh tanda koefisien polinom karakteristik. Diperoleh bahwa semua koefisien bernilai positif dan memenuhi syarat Routh–Hurwitz apabila $R_0 > 1$. Kestabilan titik ekuilibrium endemik ditentukan oleh tanda bagian real dari nilai eigen matriks Jacobian. Berdasarkan kriteria Routh–Hurwitz, sistem akan stabil apabila semua koefisien polinom karakteristik memenuhi kondisi tertentu yang menjamin bagian real nilai eigen bernilai negatif. Dalam model ini, kondisi tersebut terpenuhi ketika $R_0 > 1$. Hal ini menunjukkan bahwa ketika penyakit mampu bertahan dalam populasi, sistem akan menuju keadaan endemik yang stabil.

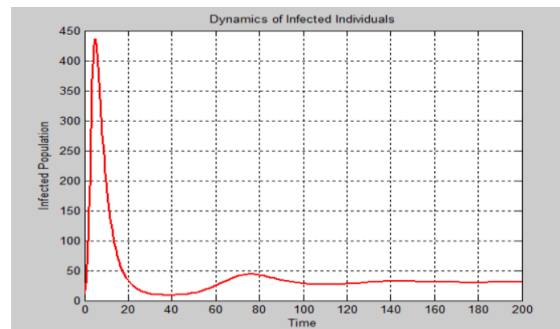
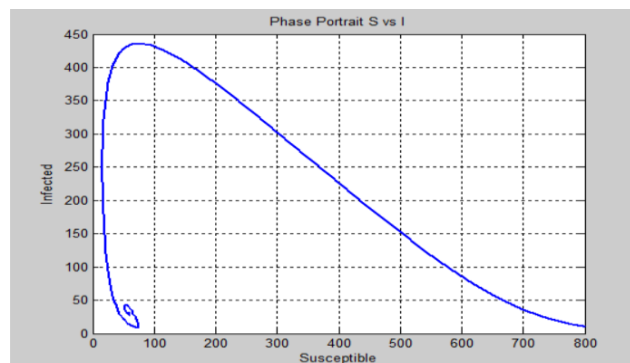
Hasil analisis kestabilan endemik ini sejalan dengan penelitian sebelumnya terkait pemodelan kompartemen pada penyakit tidak menular, di mana nilai $R_0 > 1$ menjamin persistensi faktor risiko di masyarakat (Kaya' et al., 2021). Dalam konteks penularan sosial, kondisi endemik yang stabil menunjukkan bahwa kebiasaan buruk, seperti pola makan tidak sehat dan kurangnya aktivitas fisik, akan terus berlipat ganda dalam jejaring sosial jika laju intervensi (γ) tidak ditingkatkan secara signifikan. Fenomena ini secara empiris telah dikonfirmasi oleh temuan epidemiologi jaringan sosial oleh Christakis & Fowler (2007) dan Hill et al. (2010), yang menyimpulkan bahwa individu memiliki probabilitas jauh lebih tinggi untuk mengalami gangguan metabolik jika mereka berada dalam lingkungan sosial yang menormalisasi gaya hidup sedentari.

Grafik Simulasi Numerik

Visualisasi dari solusi model sistem (Gambar 1.1, Gambar 1.2, dan Gambar 1.3) mendemonstrasikan konvergensi trajektori populasi seiring berjalannya waktu t . Grafik dinamika kompartemen $I(t)$ secara jelas menunjukkan kurva yang tumbuh secara eksponensial pada fase awal akibat tingginya paparan gaya hidup buruk, sebelum akhirnya stabil menuju nilai ekuilibrium endemik. Potret fase sistem antara $S(t)$ dan $I(t)$ memvalidasi analisis teoretis, di mana lintasan trajektori membentuk spiral teredam (damped spiral) yang konvergen menuju satu titik tetap.



Gambar 1. Dinamika Populasi Model Diabetes Mellitus terhadap Waktu

Gambar 2. Dinamika Populasi Terinfeksi $I(t)$ terhadap WaktuGambar 3. Potret Fase Sistem $S(t)$ terhadap $I(t)$

Fenomena osilasi teredam konsisten dengan perilaku dinamik pada model epidemiologi diabetes komprehensif yang dikaji oleh Boutayeb et al. (2004) dan Ulfah (2014). Kajian tersebut mengindikasikan bahwa tanpa adanya intervensi gaya hidup yang agresif dan berkelanjutan, populasi terinfeksi akan menetap pada rasio prevalensi yang tinggi. Titik konvergensi ini merepresentasikan tercapainya keseimbangan baru, di mana jumlah penderita DM dalam populasi menjadi konstan akibat laju intervensi hanya mampu mengimbangi laju penularan kebiasaan buruk dari lingkungan (Hruschka et al., 2011)

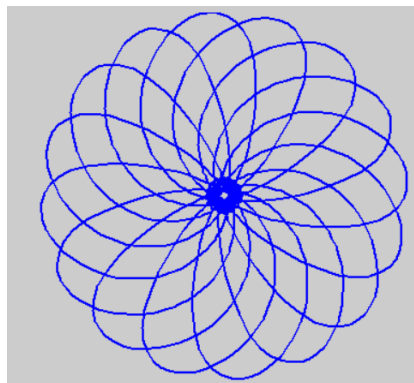
Transformasi Geometris Pada Ornamen (Seni Generatif)

Eksplorasi lanjutan dari simulasi ini berfokus pada ranah visual. Trajektori populasi terinfeksi $I(t)$ yang telah dinormalisasi ke dalam interval $[0,1]$ dimanfaatkan sebagai parameter input matematis.

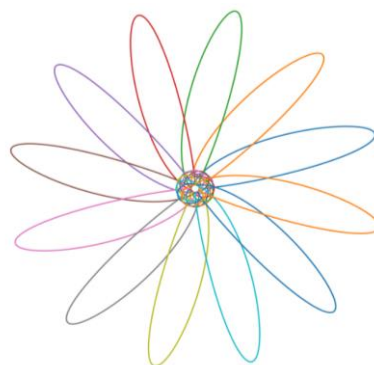
Melalui pemetaan fungsi parametrik Cartesien ke dalam koordinat polar $x = I(t) \cos(\theta)$ dan $y = I(t) \sin(\theta)$, kurva epidemiologi diubah menjadi kurva radial lingkaran penuh.

Pengaplikasian matriks transformasi simetri rotasi secara iteratif membuahkan hasil visual seperti yang tersaji pada Gambar 1.4 dan Gambar 1.5. Dengan melakukan rotasi secara berulang sebanyak n kali, diperoleh pola radial yang memiliki simetri melingkar, kelipatan sudut, dan pengulangan geometris. Eksplorasi visual ini memperluas kajian terkait seni generatif algoritmik, yang membuktikan bahwa deret data kuantitatif dan sistem persamaan diferensial dapat direkayasa menjadi struktur geometri baru yang memiliki nilai estetika (Boden & Edmonds, 2009; Greenfield, 2006; McCormack et al., 2014).

Lebih jauh, keberhasilan pembentukan pola simetri radial dari trajektori $I(t)$ memiliki kaitan dengan prinsip keteraturan matematis pada ragam hias dan motif tradisional Indonesia. Berbagai kajian etnomatematika telah membuktikan bahwa ornamen budaya sejatinya dibangun di atas prinsip-prinsip transformasi geometri, pola barisan, hingga pengulangan struktur fraktal (Alghar & Jamaluddin, 2024; Azzahra et al., 2023; Hariadi et al., 2013; Romadiastri, 2017; Rukmawati et al., 2025; Sudrajat et al., 2026). Oleh karena itu, pola-pola generatif yang dibangkitkan dari kurva epidemiologi dalam penelitian ini menjadi grafik parametrik sekaligus membentuk ornamen visual. Hal ini menjadi gambaran integrasi sains komputasi, persamaan diferensial, dan apresiasi terhadap seni ornamen tradisional.



Gambar 4. Ornamen geometris hasil konstruksi menggunakan MATLAB



Gambar 5. Ornamen geometris hasil konstruksi menggunakan Python

Hasil konstruksi ornamen geometris dari trajektori solusi numerik model ditunjukkan pada Gambar 1.4 dan Gambar 1.5. Gambar 1.4 merupakan pola yang dihasilkan menggunakan perangkat

lunak MATLAB, sedangkan Gambar 1.5 dihasilkan menggunakan Python. Kedua desain diperoleh melalui pemetaan koordinat polar terhadap solusi kompartemen terinfeksi $I(t)$ yang dikenakan operasi rotasi. Perbedaan visual yang muncul pada kedua representasi tersebut semata-mata disebabkan oleh perbedaan algoritma pewarnaan (*color mapping*) dan parameter bawaan pada masing-masing bahasa pemrograman. Namun, secara struktural dan analitis, keduanya menunjukkan pengulangan presisi geometris yang konsisten.

SIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, berhasil dikonstruksi dan dianalisis model matematika kompartemen SEIT yang merepresentasikan dinamika penyebaran faktor risiko Diabetes Mellitus melalui pendekatan penularan sosial. Hasil analisis matematis mengonfirmasi bahwa solusi sistem bernilai positif dan terbatas di dalam wilayah invarian, sehingga model yang dikembangkan memenuhi konsistensi logis untuk menganalisis penyebaran gaya hidup berisiko dalam populasi. Evaluasi titik ekuilibrium menunjukkan eksistensi dua kondisi keseimbangan, yakni ekuilibrium bebas penyakit dan endemik. Analisis kestabilan lokal membuktikan bahwa titik bebas penyakit bersifat stabil asimtotik ketika angka reproduksi dasar $R_0 < 1$, yang mengindikasikan bahwa intervensi dan edukasi berhasil mengeliminasi penyebaran gaya hidup pemicu DM. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$, sistem akan konvergen menuju keseimbangan endemik yang stabil, menandakan bahwa risiko DM akan terus bertahan di dalam populasi. Transformasi matematis menggunakan pemetaan koordinat polar dan pengaplikasian matriks simetri rotasi terhadap trajektori populasi terinfeksi $I(t)$ berhasil membangkitkan pola visual berupa ornamen geometris yang kompleks. Penelitian ini tidak hanya memberikan wawasan prediktif terhadap dinamika penyakit metabolik, tetapi menyajikan integrasi lintas disiplin yang harmonis antara sains komputasi matematika dan desain seni visual parametrik.

Daftar Pustaka

- Alghar, M. Z., & Jamaluddin. (2024). Ethnomodelling: Fractal Geometry On The Door Ornament Of The Sumenep Palace Using The Lindenmayer System. *Euclid*, 11(1), 1–16. <https://doi.org/10.33603/x5gk7n46>
- Azzahra, S., Mislaini, & Alghar, M. Z. (2023). Eksplorasi Deret Kuadrat dan Barisan Aritmatika pada Batik Madura Motif Bha'jit. *Journal of Matematics In Teaching and Learning*, 2(1), 86–96.
- Boden, M. A., & Edmonds, E. A. (2009). What is generative art? *Digital Creativity*, 20(1–2), 21–46. <https://doi.org/10.1080/14626260902867915>
- Boutayeb, A., Twizell, E. H., Achouayb, K., & Chetouani, A. (2004). A mathematical model for the burden of diabetes and its complications. *BioMedical Engineering OnLine*, 3(1), 20. <https://doi.org/10.1186/1475-925X-3-20>
- Boyko, E. J., Karuranga, S., Magliano, D. J., Saedi, P., & Sun, H. (2021). International diabetes federation (IDF) diabetes atlas 10th edition [internet]. In *International Diabetes Federation*. www.idf.org

diabetesatlas.org.

- Christakis, N. A., & Fowler, J. H. (2007). The Spread of Obesity in a Large Social Network over 32 Years. *New England Journal of Medicine*, 357(4), 370–379. <https://doi.org/10.1056/NEJMsa066082>
- Duun-Henriksen, Anne Katrine, Schmidt, Signe, Røge, Rikke Meldgaard, Møller, Jonas Bech, Nørgaard, Kirsten, Jørgensen, John Bagterp, & Madsen, Henrik. (2013). Model Identification Using Stochastic Differential Equation Grey-Box Models in Diabetes. *Journal of Diabetes Science and Technology*, 7(2), 431–440. <https://doi.org/10.1177/193229681300700220>
- Greenfield, G. R. (2006). Art by computer program == programmer creativity. *Digital Creativity*, 17(1), 25–35. <https://doi.org/10.1080/14626260600665694>
- Hariadi, Y., Lukman, M., & Destiarmand, A. H. (2013). Batik fractal: Marriage of art and science. *ITB J. Vis. Art & Des*, 4(1), 84–93.
- Hill, A. L., Rand, D. G., Nowak, M. A., & Christakis, N. A. (2010). Infectious Disease Modeling of Social Contagion in Networks. *PLOS Computational Biology*, 6(11), e1000968. <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000968>
- Hruschka, D. J., Brewis, A. A., Wutich, A., & Morin, B. (2011). Shared norms and their explanation for the social clustering of obesity. *American Journal of Public Health*, 101(S1), S295–S300.
- Iliinsky, N., & Steele, J. (2011). *Designing data visualizations: Representing informational Relationships*. “O’Reilly Media, Inc.”
- Kaya’, K., Darmawati, & Ekawati, D. (2021). Model Matematika pada Penyakit Diabetes Melitus dengan Faktor Genetik dan Faktor Sosial. *Journal of Mathematics: Theory and Applications*, 3(1), 23–30.
- McCormack, J., Bown, O., Dorin, A., McCabe, J., Monro, G., & Whitelaw, M. (2014). Ten Questions Concerning Generative Computer Art. *Leonardo*, 47(2), 135–141. https://doi.org/10.1162/LEON_a_00533
- Romadiastri, Y. (2017). Batik Fraktal: Perkembangan Aplikasi Geometri Fraktal. *Delta: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 1(2), 158–164. <https://doi.org/10.31941/delta.v1i2.484>
- Rukmawati, M., Gita, R. S. D., Emyus, A. Z., & Agustin, I. H. (2025). Incorporating the fractal geometry on batik patterns based on natural leaf prints under RBL-STEM learning activities to enhance students’ skills. In I. H. Agustin, A. I. Kristiana, R. Nisviasari, E. Y. Kurniawati, & Dafik (Eds.), *AIP Conference Proceedings* (Vol. 3372, Number 1). American Institute of Physics. <https://doi.org/10.1063/5.0299317>
- Soewondo, P., Ferrario, A., & Tahapary, D. L. (2013). Challenges in diabetes management in Indonesia: a literature review. *Globalization and Health*, 9(1), 63. <https://doi.org/10.1186/1744-8603-9-63>
- Sudrajat, S., Warniasih, K., & Purwaningsih, D. (2026). Eksplorasi Etnomatematika pada Motif Batik Ganasan Khas Subang Sebagai Sumber Pembelajaran Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 13(1), 35–50. <https://doi.org/10.18592/jpm.vi.20558>

- Ulfah, J. (2014). Model Matematika Untuk Penyakit Diabetesmellitus Tanpa Faktor Genetik Dengan Perawatan. *Unnes Journal of Mathematics*, 3(1), 25–32.
- Zheng, Y., Ley, S. H., & Hu, F. B. (2018). Global aetiology and epidemiology of type 2 diabetes mellitus and its complications. *Nature Reviews Endocrinology*, 14(2), 88–98.
<https://doi.org/10.1038/nrendo.2017.151>